Mengenlehre

Für alle: $\forall$

Es gibt: $\exists$

Anzahl der Elemente: $|Menge|$

Naiver Mengenbegriff:

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von wohl bestimmten und wohldefinierten Elementen.

<u>Wohl bestimmt:</u> Entweder $x \in M$ oder $x \notin M$
<u>Wohldefiniert:</u> Für zwei $x_{1,} x_2$ gilt entweder $x_1 = x_2$ oder $x_1 \neq x_2$

(Un)Endliche und (Über)Abzählbare Mengen:

<u>Endlich:</u> die Menge hat nur endlich viele Elemente
<u>Abzählbar:</u> Die Elemente der Menge können gezählt werden
<u>Abzählbar unendlich:</u> Unendlich viele Elemente, zählbar: z.B. $\mathbb{N}$
<u>Überabzählbar unendlich:</u> Unendlich viele Elemente, keine Zählung. z.B. $\mathbb{R}$

Beschreibung von Mengen:

M = {x : x ist eine natürliche Zahl}
Doppelpunkt heißt „für das/die gilt"

Leere Menge:

Enthält keine Elemente. $\emptyset$ oder {}

Gleichheit von Mengen:

Alle Elemente müssen übereinstimmen, die Reihenfolge ist egal
$M_1 \underline{\Theta} M_2$ oder vereinfacht $M_1 = M_2$

Teilmenge:

$$M_1 \subset M_2 \Leftrightarrow \forall x \in M_1 : x \in M_2$$
$$\emptyset \subset M \ \forall M$$

Potenzmenge:

Die Potenzmenge P(M) ist die Gesamtheit aller Teilmengen von M
$$P(M) = \{A : A \subset M\}$$
$$A \in P(M) \Leftrightarrow A \subset M$$
Wenn M n Elemente hat, hat P(M) n² Elemente inkl. M und $\emptyset$

Differenz zweier Mengen:

$$S - T = \{x : x \in S \ und \ x \notin T\}$$

Symmetrische Differenz:

$$S_\nabla T = x : x \in S, x \notin T \ oder \ x \notin S, x \in T$$

<u>Folgerungen:</u>
$$S_\nabla T = (S - T) \cup (T - S)$$
$$S_\nabla T = T_\nabla S$$
$$S_\nabla T = (S \cup T) - (T \cap S)$$
$$S_\nabla S = \emptyset$$
$$S \subset T \Rightarrow S_\nabla T = T - S$$

Komplement:

G := Grundmenge und $S \subset G$
Das Komplement $\bar{S}$ in G ist $G-S$
d.h.: $\bar{S}=\{x \in G : x \notin S\}$

Eigenschaften:

$S \cap \bar{S} = \emptyset$
$S \cup \bar{S} = G$
$\bar{\bar{S}} = S$
$S = G \Leftrightarrow \bar{S} = \emptyset$
$S = \emptyset \Leftrightarrow \bar{S} = G$

Bei endlichem G: $|\bar{S}|=|G|-|S|$

Regeln von de Morgan:

$\overline{S \cup T} = \bar{T} \cap \bar{S}$
$\overline{S \cap T} = \bar{T} \cup \bar{S}$

Kommutativgesetz: $S \cap T = T \cap S \quad S \cup T = T \cup S$

Assoziativgesetz:

$R \cap (S \cap T) = (R \cap S) \cap T = R \cap S \cap T$
$R \cup (S \cup T) = (R \cup S) \cup T = R \cup S \cup T$

Idempotenzgesetz: $S \cap S = S \quad S \cup S = S$

Absorptionsgesetz: $S \cup (S \cap T) = S \quad S \cap (S \cup T) = S$

Distributivgesetz:

$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$
$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$

Null- / Eins-Gesetz: $S \cap \emptyset = \emptyset \quad S \cup \emptyset = S$

Komplementgesetz: $S \cap \bar{S} = \emptyset \quad S \cup \bar{S} = Grundmenge\ G$

Geordnetes Paar: (x, y) z.B. von zwei reellen Zahlen. Reihenfolge wichtig!

Gleichheit von geordneten Paaren: $(x_{1,} y_1) = (x_{2,} y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_{2,} y_1 = y_2$

Kartesisches Produkt zweier Mengen:

Es gilt: S, T sind Mengen:

$$S \times T = (s, t) : \forall s \in S, \forall t \in T$$

(Alle Elemente von S mit allen Elementen von T verknüpfen!)

n-Faches kartesisches Produkt: $M_1 \times \cdots \times M_n = (m_1, \cdots, m_2)$ (geordnetes n-Tupel)

Teilbarkeit: $x|y$ x teilt y z.B.

Binäre Relation R zwischen Mengen M und N:

$R \subset M \times N \Leftrightarrow R \subset \{(m, n) : m \in M, n \in N\} = x R y$
*(Relation = Teil**menge** des kartesischen Produkts)*

Sprich: x steht in Relation R zu y

n-näre Relation R zwischen Mengen M_1 ... M_n: $\{(m_1, \cdots, m_n) : m_1 \in M_1, \cdots, m_n \in M_n\}$

n-näre Relation R auf/in der Menge M: Bei: $M_1 = \cdots = M_n$

Leere Relation: $R \subset M \times N$ mit $R = \emptyset$

Schreibweisen von Relationen:

Binäre Relation: $(x, y) \in R \Leftrightarrow \ldots = x\,R\,y$

n-näre Relation: $(x, y, \cdots) \in R \Leftrightarrow \ldots$

Auch als: $(Menge, Relationen)$ z.B. $(M, R_1, R_2, R_3, \cdots)$

Mengenoperationen auf Relationen:

$R_1 \cup R_2 = \{(x, y) : (x, y) \in R_1\, oder\, (x, y) \in R_2\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(x, y) : (x, y) \in R_1\, und\, (x, y) \in R_2\}$

$\bar{R} = \{(x, y) : (x, y) \notin R\}$

$R_1 = R_2$ sowie $R_1 \subset R_2$ (wie der Rest auch) s. normale Mengen!

Produkt / Komposition von Relationen:

Es seien:

$R_1 \subset M \times N \Rightarrow m\,R_1\,n$

$R_2 \subset N \times O \Rightarrow n\,R_2\,o$

Daraus folgt:

$R_1 \circ R_2 = R_3 = \{(m, o) \in M \times O : \exists n \in N \Rightarrow m\,R_1\,n, n\,R_2\,o\}$

(Zwei Relationen wie Dominosteine zu einer neuen zusammen geschoben)
(Bei Matrixdarstellung: Matritzenmultiplikation)

Beispiel:

$R_1 = \{(a, A), (b, B), (c, C)\}$

$R_2 = \{(A, 1), (4, 5), (e, f), (B, 2)\}$

$R_1 \circ R_2 = \{(a, 1), (b, 2)\}$

Assoziativgesetz bei Relationen: $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C) = A \circ B \circ C$

Ausschluss des Kommutativgesetz: i.d.R.: $A \circ B \neq B \circ A$

Inverse Relation:

$R \subset M \times N$

$\Rightarrow R^{-1} \subset N \times M$

$R^{-1} = \{(n, m) \in N \times M : (m, n) \in R\}$

(Umdrehen der geordneten Paare)

Rechenregeln für Inverse Relationen:

$(R^{-1})^{-1} = R$

$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$!

Darstellung von Relationen:

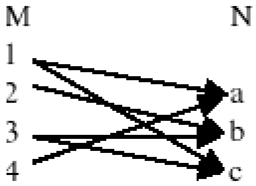
<u>Mengenschreibweise (bei kleinen Relationen):</u>

$$M=\{1,2,3,4\}$$
$$N=\{a,b,c\}$$
$$R\subset M\times N: R=\{(1,a),(1,c),(2,b),(3,b),(3,c),(4,a)\}$$

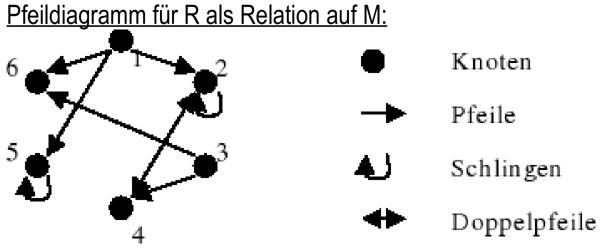
<u>Tabelle / Matrix:</u>

M \ N	a	b	c
1	1	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0

<u>Pfeildiagramm / Gerichteter Graph:</u>



<u>Pfeildiagramm für R als Relation auf M:</u>



Identische Relation I:

$$I\subset M\times M:\{(x,x)\in M\times M: x\in M\}$$
$$\Rightarrow (x,y)\in I \Leftrightarrow x=y$$

Es gilt: $I^{-1}=I$

<u>Tabellenform:</u> Einheitsmatrix
<u>Graph:</u> Nur Knoten mit Schlingen, keine Pfeile, keine Doppelpfeile

<u>Bemerkung:</u> $(\mathbb{R},=)$ Die Relation = ist die Ident. Rel. der reellen Zahlen

Reflexivität:

<u>Graph:</u> Jeder Knoten hat eine Schlinge
<u>Matrix:</u> In der Hauptdiagonale lauter Einsen

Jedes Element steht mit sich selbst in Relation:

$$(M,R): I\subset R \Rightarrow \forall\, x\in M: (x,x)\in R$$

Symmetrie:

<u>Graph:</u> keine Einfachpfeile
<u>Matrix:</u> Ist symmetrisch (geht durch Spiegelung a. d. Diagonalen in sich über)

Wenn es eine Relation zwischen zwei Elementen gibt, gibt es auch die Umkehrung dazu:

$$((x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R) \Leftrightarrow R^{-1}=R$$

Anti-Symmetrie:

<u>Graph:</u> keine Doppelpfeile
<u>Matrix:</u> Keine Einsen symmetrisch zur H-Diagonale außerhalb der H-Diagonale

Wenn es eine Relation zwischen zwei Elementen gibt, gibt es <u>keine</u> Umkehrung:
$(x,y)\in R,(y,x)\in R \Rightarrow x=y$
d.h. $R\cap R^{-1}\subset I$

Transitivität:

<u>Graph:</u> Bei Umweg: Direktverbindung

Wenn zwei Elemente indirekt zueinander in Relation stehen, stehen sie auch direkt in Relation miteinander:
$((x,y)\in R,(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R) \Leftrightarrow R\circ R\in R$

Äquivalenzrelation:

Die Relation $R\subset M\times M$ heißt Äquivalenzrelation wenn R transitiv, symmetrisch und reflexiv ist.

$x\,R\,y \Leftrightarrow x\sim y$

Jedes Element steht zu sich selbst in Relation (reflexiv)
Es gilt die Umkehrrelation (Symmetrie)
Indirekt verbundene Elemente stehen auch direkt in Relation (transitiv)

Doppelpfeile und Schlingen zwischen/bei allen Knoten!!

z.B. (R, =) oder (Geraden, parallel zu), {(n,m) : n MOD z = m MOD z}

Äquivalenzklasse:

Sei R eine Äquivalenzrelation in M und $x\in M$:
$R[x]=\{y\in M:(x,y)\in R\}$

Die Menge aller $y: x\sim y$

Zwei Äquivalenzklassen sind entweder <u>Identisch oder Disjunkt</u> (Partitionen!).

Partition / Zerlegung:

I sei eine *beliebige* Relation mit $i\in I$
M sei eine Menge mit $A_i\in P(M)$ und $A_i\neq\emptyset, A_i\neq M$.

A_i bilden einer Partition / Zerlegung von M , wenn gilt:
$A_i\cap A_j=\emptyset\,; i\neq j$ und
$A_1\cup\cdots\cup A_i=M$

Keine Überschneidungen zwischen den Partitionen, alle zusammen ergeben M.
M ist die disjunkte Vereinigung der A_i.

Über Äquivalenzklassen und Partitionen:

<u>Bei Äquivalenzrelationen:</u>
Jede Äquivalenzklasse definiert eine Partition.
Umgekehrt definiert jede Partitionen eine Äquivalenzklasse.

Es können also von den Doppelpfeilen und Schlingen auf die Partitionen geschlossen werden.

Es können aber auch von den Partitionen auf die Doppelpfeile und Schlingen geschlossen werden!

Ordnungsrelation:

Die Relation $R \in M \times M$ heißt Ordnungsrelation auf M wenn R

reflexiv, anti-symmetrisch und transitiv ist.

Man nennt (M, R) eine geordnete Menge. (R ist Ordnung auf M)

$x R y$ gleich bedeutend mit $x \leqslant_R y$ für $x \neq y$

Jedes Element ist mit sich selbst verbunden (reflexiv)
Nur einseitig gerichtete Relationen (anti-symmetrisch)
Zu jedem Umweg eine Direktverbindung (transitiv)

Beispiele: $(\mathbb{R}, =), (\mathbb{R}, \leqslant), (\mathbb{N}, |)$

Vergleichbarkeit von geordneten Elementen:

$x, y \in M$ heißen vergleichbar wenn entweder $x R y$ oder $y R x$

Totalordnung: Alle Elemente von M sind bzgl. R vergleichbar.
Sonst Teilordnung / Partielle Ordnung.

Maximales Element:

(M, R) sei eine geordnete Menge und $A \subset M$:

$b \in A$ heißt maximales Element von A wenn gilt:
$\Leftrightarrow \forall x \in A : b \leqslant x$ folgt $b = x$

Es gibt kein echt größeres Element!

Minimales Element:

(M, R) sei eine geordnete Menge und $A \subset M$:

$b \in A$ heißt minimales Element von A wenn gilt:
$\Leftrightarrow \forall x \in A : x \leqslant b$ folgt $b = x$

Es gibt kein echt kleineres Element!

Maximum:

Eindeutiges maximales Element

Minimum:

Eindeutiges minimales Element

Obere Schranke:

(M, R) sei eine geordnete Menge und $A \subset M$:

$s \in M$ heißt obere Schranke von A wenn gilt:
$\Leftrightarrow \forall x \in A : x \leqslant s$

Alle Elemente der Teilmenge sind kleiner als die obere Schranke. Ist die obere Schranke Teil der Teilmenge, so ist sie ein maximales Element, ggf. Maximum.

Untere Schranke:

(M, R) sei eine geordnete Menge und $A \subset M$:

$s \in M$ heißt untere Schranke von A wenn gilt:
$\Leftrightarrow \forall x \in A : s \leqslant x$

Alle Elemente der Teilmenge sind größer als die untere Schranke. Ist die untere Schranke Teil der Teilmenge, so ist sie ein minimales Element, ggf. Minimum.

Supremum:

Besitzt die Menge der oberen Schranken ein Minimum $g \in M$, so heißt g obere Grenze (Supremum) von A.

$$g = \sup A$$

Inferium:

Besitzt die Menge der unteren Schranken ein Maximum $g \in M$, so heißt g untere Grenze (Inferium) von A.

$$g = \inf A$$

Oberer Nachbar:

(M, R) sei eine geordnete Menge und $A \subset M$:

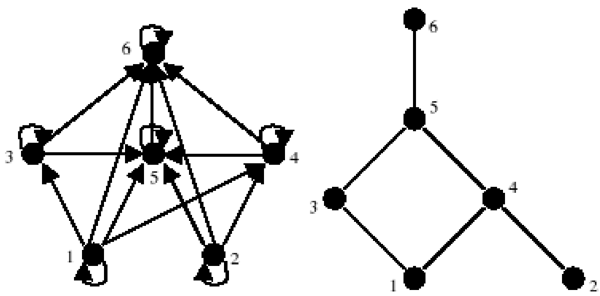
$a \in A$ heißt oberer Nachbar von $b \in A$ wenn gilt:
$b < a$
Aus $c < b$ folgt $a = c$

Es wohnt niemand zwischen a und c, sie sind auch nicht gleich!

Hasse-Diagramm:

Vereinfachte Darstellung des Graphen für Ordnungsrelationen:

<u>Herkömmlicher Graph vs. den neuen Hasse Spezial:</u>



<u>Weglassen von:</u>
Schlingen, Transitiv-Verbindungen, Pfeilspitzen (immer von Unten nach Oben!)

Abbildung (Funktion) M -> N:

Die Abbildung von der Menge M in die Menge N ist eine rechtseindeutige Relation $R \subset M \times N$ mit der Eigenschaft
$\forall\, x \in M\ \exists$ mindestens ein $y \in N : (x, y) \in R$

Abbildungen werden meist mit kleinen Buchstaben f,g,h ... bezeichnet.
y = f(x) heißt Funktionswert von f an der Stelle x.
M heißt Definitionsbereich
N heißt Wertebereich

$f : M_1 \rightarrow M_2$ und $f \in M_1 \times M_2$

Gleichheit von Abbildungen:

Zwei Abbildungen $f_1 = M_1 \rightarrow N_{1,}\, f_2 = M_2 \rightarrow N_2$ sind gleich
$(f_1 = f_2) \Leftrightarrow M_1 = M_{2,}\, N_1 = N_{2,}\, f_1(x) = f_2(x)\ \forall\, x \in M_1$

Surjektive Abbildung:

$f = M \to N$ heißt surjektiv
$\Leftrightarrow \forall\, y \in N : \exists$ mindestens ein $x \in M : f(x) = y$

Jedes Element des Wertebereichs wird mindestens einmal erreicht.

Injektive / Linkseindeutige Abbildung:

$f = M \to N$ heißt injektiv / linkseindeutig
$\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ es folgt $x_1 = x_2$

Eine Relation $R \subset M \times N$ heißt injektiv / linkseindeutig wenn aus
$(x_{1,} y) \in R$ und $(x_{2,} y) \in R$ folgt: $x_1 = x_2$

Kein Element des Wertebereichs hat mehr als einen Partner im Definitionsbereich.

Bijektive Abbildung:

$f = M \to N$ heißt bijektiv wenn f surjektiv und injektiv ist.

Jedes Element des Wertebereichs hat genau einen Partner.

Umkehrabbildung:

$R^{-1} = \{(y, x) : y = f(x)\}$ ist rechtseindeutig: $R^{-1} \subset N \times M$

Einfach die Pfeile umdrehen!

Umkehrfunktion / Inverse Abbildung:

Sei $f = M \to N$ bijektiv:
Die durch $R^{-1} \subset N \times M$ definierte Abbildung $f^{-1} : N \to M$ heißt die zu f inverse Abbildung / Umkehrfunktion: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Urbild:

Sei $f = M \to N$ und $B \subset N$:
Das Urbild ist durch $f^{-1}(B) = \{x \in M : f(x) = B\}$ definiert.

Alle x *aus denen* $y \in B$ *folgt.*

Boolsche Algebra

Aufbau einer Booleschen Algebra:

$(B, \wedge, \vee, ')$ mit $B = \{0,1\}$ und
$\wedge = \mathrm{AND}$
$\vee = \mathrm{OR}$
$' = NOT$
(Diese Relationen sind keine Teilmenge!)

Boolsche Algebra der Teilmengen:

Sei M eine Menge, so ist $(P(M), \cap, \cup, \bar{\ })$ eine B.A. mit dem Nullelement $\emptyset$ und dem Einselement M .

Eigenschaften einer Booleschen Algebra:

Sei $(V, \wedge, \vee, ')$ eine Boolsche Algebra. So gilt $\forall\, a \in V$:
$a \wedge a = a$ und $a \vee a = a$
$a \vee a' = 1$ und $a \wedge a' = 0$ *(Null und Eins sind eindeutig)*
$(a')' = a$ *(Das Komplement ist eindeutig)*
$(a \vee b)' = a' \wedge b'$ sowie $(a \wedge b)' = a' \vee b'$

Assoziativgesetze:

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

Kommutativgesetze:

$$a \wedge b = b \wedge a \qquad a \vee b = b \vee a$$

Absorption / Verschmelzungsgesetze:

$$a \wedge (b \vee a) = a$$
$$a \vee (b \wedge a) = a$$

Distributivgesetze:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Null-Eins-Gesetze:

$$a \vee 0 = a \qquad a \wedge 0 = 0$$
$$a \vee 1 = 1 \qquad a \wedge 1 = a$$

Komplement-Gesetze:

$$a \vee a' = 1 \qquad a \wedge a' = 0$$

Dualität:

Man ersetze:
$\wedge$ durch $\vee$
$\vee$ durch $\wedge$
0 durch 1
1 durch 0

Schon erhält man das andere Axiom der selben Gruppe.

Schaltfunktion:

Eine n-stellige Schaltfunktion ordnet jedem n-Tupel von Wahrheitswerten einen Wahrheitswert zu.

Konjunktionsterm:

Term, welcher nur aus AND-Verknüpfungen und ggf. Negationen besteht.

Disjunktionsterm:

Term, welcher nur aus OR-Verknüpfungen und ggf. Negationen besteht.

Minterm:

Konjunktionsterm, der für einen bestimmten Zustand den Wert 1 annimmt.
$$B = 1 \Rightarrow B$$
$$B = 0 \Rightarrow B'$$

Maxterm:

Disjunktionsterm, der für einen bestimmten Zustand, den Wert 0 annimmt.
$$B = 0 \Rightarrow B$$
$$B = 1 \Rightarrow B'$$

Disjunktive Normalform (DNF):

OR-Verknüpfung von Mintermen.

Konjunktive Normalform (KNF):

AND-Verknüpfung von Maxtermen.

Aussagenlogik

Formeln

Atomare Formeln $A_1 \cdots A_n$ der Aussagenlogik
Für alle Formeln F und G sind $(F \wedge G), (F \vee G)$ Formeln
Für jede Formel F ist $\neg F$ eine Formel

Teilformel:

Eine Formel F, welche als Teil einer Formel G auftritt heißt Teilformel von G.

Belegung / Interpretation: Zuordnung eines Wahrheitswertes zu einer Formel.

„Atomare" Junktoren: Die Operatoren der Aussagenlogik:

$\wedge = \text{AND}$
$\vee = \text{OR}$
$\neg = \text{NEG}$

„Nicht-Atomare" Junktoren:

Implikation: $F_1 \rightarrow F_2$ statt $\neg F_1 \vee F_2$
immer wahr außer bei: $w \rightarrow f = f$

Äquivalenz: $F_1 \Leftrightarrow F_2$ statt $((F_1 \wedge F_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2))$
immer wahr, wenn beide Werte gleich sind!

Hierarchie der Junktoren: $\neg\,,\ \wedge\,,\ \vee\,,\rightarrow,\Leftrightarrow$

Wahrheitstabellen: Lassen sich für alle Formeln erstellen und erleichtern das Leben ungemein!

Logische Äquivalenz / Gleichwertigkeit: Nehmen zwei Formeln $F_{1,} F_2$ bei jeder gleichen Belegung ihrer Aussagenvariablen den gleichen Wert an, so nennt man sie logisch äquivalent oder gleichwertig:

$F_1 \equiv F_2$ oder vereinfacht: $F_1 = F_2$

Zwei Formeln $F_{1,} F_2$ sind gleichwertig, wenn die Formel $F_1 \Leftrightarrow F_2$ immer den Wert 1 annimmt.

Kommutativgesetze:

$A \wedge B \equiv B \wedge A$
$A \vee B \equiv B \vee A$

Assoziativgesetze:

$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \equiv A \wedge B \wedge C$
$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \equiv A \vee B \vee C$

Distributivgesetze:

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Idempotenzgesetze:

$A \vee A \equiv A$
$A \wedge A \equiv A$

Regeln von de Morgan:

$\neg(A \wedge B) \equiv \neg B \vee \neg A$
$\neg(A \vee B) \equiv \neg B \vee \neg A$

Konjunktive Normalform:

Wahrheitsmatrix aufstellen
Alle Zeilen mit Ergebnis 1 raus suchen
Werte der Zeile mit $\wedge$ verknüpfen
Wobei $A = 1 \Rightarrow A$ $A = 0 \Rightarrow \neg A$ gilt.
Zeilen mit $\vee$ verknüpfen

s. Boolsche Algebra

Disjunktive Normalform:

Wahrheitsmatrix aufstellen
Alle Zeilen mit Ergebnis 0 raus suchen
Werte der Zeile mit $\vee$ verknüpfen
Wobei $A=0 \Rightarrow A$ $A=1 \Rightarrow \neg A$ gilt.
Zeilen mit $\wedge$ verknüpfen

s. Boolsche Algebra

Tautologie / Gültige Formel:

Eine Formel, welche bei allen Belegungen 1 ergibt, wird mit Θ bezeichnet.

Erfüllbare Formeln:

Mindestens eine Belegung der Formel, so dass sie 1 ergibt.

Unerfüllbare / Kontradiktorische Formeln:

Das Gegenteil von der Tautologie:

Eine Formel, welche bei allen Belegungen 0 ergigt, wird mit **0** bezeichnet.

Gültige OR-Verknüpfungen:

Seien $S_1 \cdots S_n$ Formeln und $F = S_1 \vee \cdots \vee S_n$,
so ist F gültig, sobald mindestens eine Formel S gültig ist.

Auch aussagenlogische Gesetze genannt.

Kontradiktorische AND-Verknüpfungen:

Seien $S_1 \cdots S_n$ Formeln und $F = S_1 \wedge \cdots \wedge S_n$,
so ist F kontradiktorisch, sobald mindestens eine Formel S kontradiktorisch ist.

Logische Folgerung:

<u>Prämisse:</u> $F_1 \cdots F_n$
<u>Conclusio:</u> G

G heißt logische Folgerung von $F_1 \cdots F_n$, wenn für jede Belegung, unter denen $F_1 \cdots F_n$ wahr werden, auch G wahr wird.

G ist genau logische Folgerung von $F_1 \cdots F_n$, wenn entweder
$H_1 = (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \rightarrow G$ eine Tautologie oder
$H_2 = (F_1 \wedge \cdots F_n) \wedge \neg G$ kontradiktorisch ist.