GFS

Dennis Schulmeister

Der Betrag eines Vektors

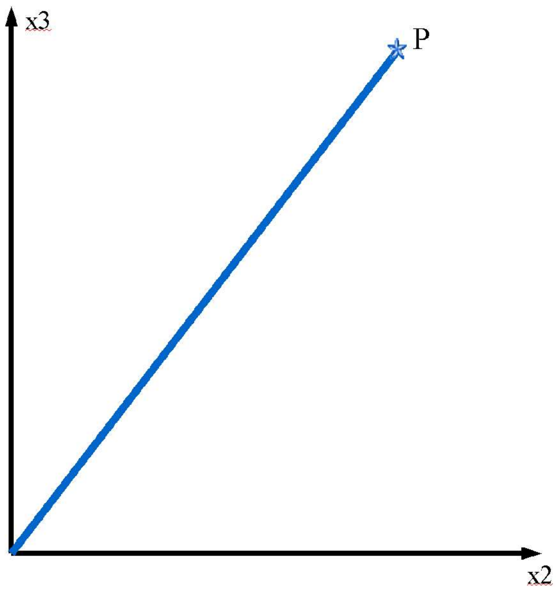
Längen, Abstände und Winkel

16 Der Betrag eines Vektors

In vielen Fällen ist es wichtig, den Abstand zwischen zwei Punkten oder die Länge eines Vektors exakt erfassen zu können. Dies trifft ganz besonders auf technische Planungen oder Computer gestützte Entwürfe zu, aber auch auf alltägliche Bereiche, wie Sport oder Computerspiele.

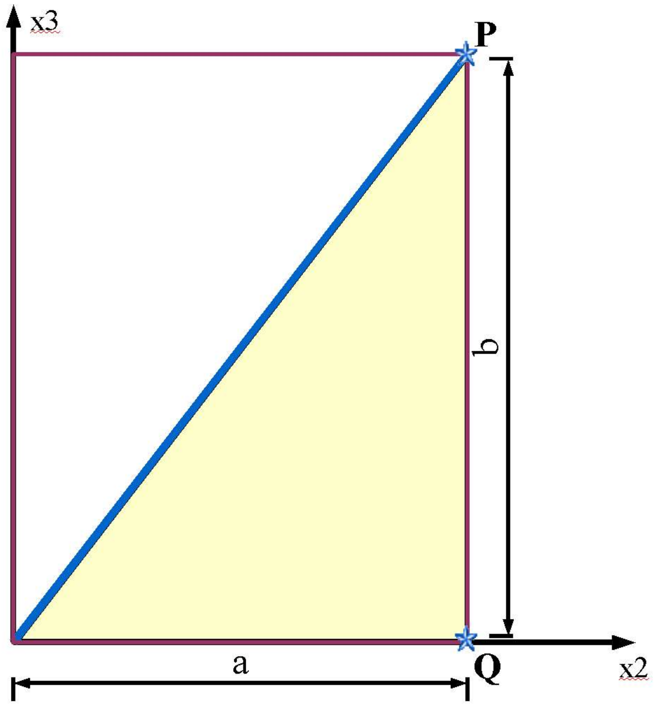
Definition: Die Länge eines Vektors wird sein Betrag genannt.

16.1 Länge und Abstand in der 2-dimensionalen Ebene



Gesucht ist die Länge der Strecke $\overline{\mathbf{OP}}$. Wenn der Punkt **P** die Koordinaten **P(a|b)** hat, kann man ein Rechteck mit den Kantenlängen **a; b** zeichnen, dessen Diagonale die Strecke **OP** ist.

Dabei entsteht das rechtwinklige Dreieck **OPQ**. Da die Längen $\overline{\mathbf{OQ}}$ und $\overline{\mathbf{QP}}$ bekannt sind, kann die Länge der Strecke **OP** mit dem Satz des Pythagoras errechnet werden.



Der Satz des Pythagoras besagt für rechtwinklige Dreiecke: $a^2+b^2=c^2$ Daraus folgt für die Länge $\overline{OP}$:

$\overline{OP}=c$

$c=\sqrt{a^2+b^2}$

Beispiel:

$P(2|5)$

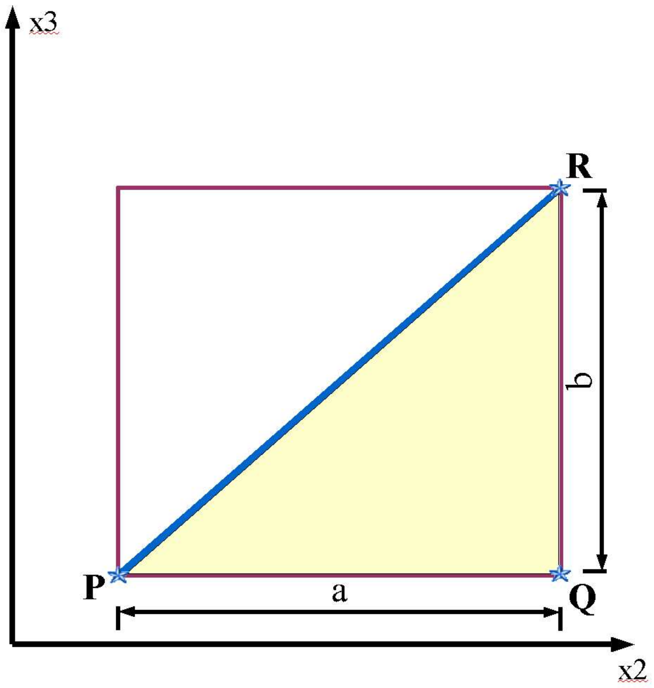
$\Rightarrow a=2$

$\Rightarrow b=5$

$c=\sqrt{4+25}$

$c=\sqrt{29}\approx 5{,}39$

Natürlich lassen sich auf die selbe Weise beliebige Abstände auf einer Ebene bestimmen:



Nun habe die Punkte P und R folgende Koordinaten: **P(a_1|a_2); R(b_1|b_2)**. Um wie oben die Länge der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen, müssen zu erst **a** und **b** als die Differenzen der Koordinaten festgelegt werden:

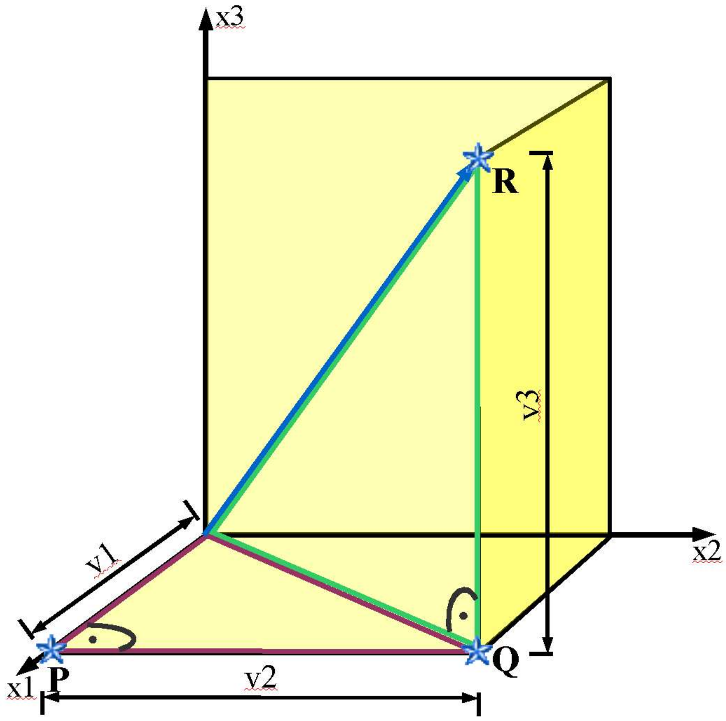
$$a = b_1 - a_1$$
$$b = b_2 - a_2$$

Die übrige Verfahrensweise erfolgt analog zum ersten Fall. Setzt man a und b in den Satz des Pythagoras ein, erhält man folgende Formel, mit der man jede beliebige Länge in einer Eben berechnen kann:

$$|\vec{r}| = c$$
$$|\vec{r}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

16.2Längen von Vektoren im Raum

Im Grunde genommen unterscheidet sich das Verfahren für Vektoren im Raum nicht von dem für 2-dimensionale Vektoren.



Der Ortsvektor $\vec{\mathbf{r}}$ ist definiert als $\vec{r}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Das Rechteck von vorhin wird nun um eine Dimension zu einem Quader erweitert. Dieser besitzt die Kantenlängen $\mathbf{v_1}$; $\mathbf{v_2}$; $\mathbf{v_3}$. Auf Grund der dritten Raumachse ist es nicht mehr möglich, den Betrag des Ortsvektors auf einmal zu berechnen.

Dies würde geschehen durch Anwendung des Satz des Pythagoras auf das Dreieck **OQR**. Die Länge $\overline{\mathbf{OQ}}$ ist aber unbekannt. Sie muss erst mit dem Satz des Pythagoras aus dem Dreieck **OPQ** errechnet werden.

Es ergibt sich:

$\overline{OQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{PQ}^2$ also

$\overline{OQ}=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2}$

Die eigentliche gesuchte Länge errechnet sich aus:

$\overline{O.R}^2=\overline{OQ}^2+\overline{QR}^2$ da $\overline{QR}=v_3$ also

$\overline{O.R}^2=\left(v_1{}^2+v_2{}^2\right)+v_3{}^2$

$$\overline{O.R}=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2}$$

Genauso lässt sich auch der Abstand zwischen zwei Punkten berechnen. Es müssen lediglich die Längen $\mathbf{v_1; v_2; v_3}$ als Differenzen der entsprechenden Vektorkoordinaten definiert werden.

Gegeben sind die beiden Punkte $\mathbf{A(a_1|a_2|a_3); B(b_1|b_2|b_3)}$. Daraus folgt:

$$v_1=b_1-a_1$$
$$v_2=b_2-a_2$$
$$v_3=b_3-a_3$$

Zusammenfassend erhält man also folgende allgemein gültige Gleichungen, um den Betrag eines Vektors und den Abstand zweier Punkte zu berechnen:

$$|\vec{r}|=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2}$$
$$|\vec{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

16.3 Übungsaufgaben

S. 443 Nr. 2

a) $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix}$

$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{(29)}\approx 5{,}39$

i) $\vec{v}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\\\sqrt{7}\end{pmatrix}$

$|\vec{v}|=\sqrt{2+3+7}=\sqrt{12}\approx 3{,}46$

d) $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1{,}5\\3{,}4\\8{,}2\end{pmatrix}$

$|\vec{v}|=\sqrt{(-1{,}5)^2+3{,}4^2+8{,}2^2}=\sqrt{81{,}05}\approx 9{,}00$

f) $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$|\vec{v}|=\sqrt{2}\approx 1{,}41$

S. 443 Nr. 4

$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$|\vec{a}|=\sqrt{14}$

$\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$

$|\vec{b}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{36}=6$

$\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$

$|\vec{c}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$

$\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

$|\vec{d}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{16}=4$

$\vec{e}=\begin{pmatrix}\sqrt{10}\\\sqrt{5}\\\sqrt{10}\end{pmatrix}$

$|\vec{e}|=\sqrt{10+5+10}=5$

$\vec{f}=(-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$|\vec{f}|=(-2)\cdot\sqrt{1^2+4^2+4^2}=(-2)\cdot\sqrt{33}$

$\vec{g}=\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$|\vec{g}|=\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{18}$

$\vec{h}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{7}\\-2\end{pmatrix}$

$|\vec{h}|=\sqrt{3+7+(-2)^2}=\sqrt{14}$

$\vec{i}=\begin{pmatrix}2\\\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$

$|\vec{i}|=\sqrt{2^2+5}=3$

$\vec{j}=6\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$|\vec{j}|=6$

$\vec{k}=\begin{pmatrix}-5\\3\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$|\vec{k}|=\sqrt{(-5)^2+3^2+2}=\sqrt{36}=6$

$\vec{l}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$

$|\vec{l}|=3$

$\vec{m}=\sqrt{5}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$|\vec{m}|=\sqrt{2+(-1)^2+2}=\sqrt{5}$

$\vec{l}<\vec{i}<\vec{a}=\vec{h}<\vec{d}<\vec{c}=\vec{e}<\vec{b}=\vec{k}<\vec{f}$

S. 445 Nr. 16

a) Kantenlängen:

$|\vec{AB}|=\sqrt{7^2+1+(-2)^2}=\sqrt{54}\approx 7{,}35$

$|\vec{BC}|=\sqrt{(-2)^2+1+3^2}=\sqrt{14}\approx 3{,}74$

$|\vec{CD}|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{34}\approx 5{,}83$

$|\vec{DA}|=\sqrt{(-1)^2+1+2^2}=\sqrt{6}\approx 2{,}45$

Diagonalen:

$|\vec{AC}|=\sqrt{5^2+2^2+1}=\sqrt{30}\approx 5{,}48$

$|\vec{BD}|=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{40}\approx 6{,}32$

Umfang:

$u=|\vec{AB}|+|\vec{BC}|+|\vec{CD}|+|\vec{DA}|=\sqrt{54}+\sqrt{14}+\sqrt{34}+\sqrt{6}\approx 19{,}37$

b) Kantenlängen:

$|\vec{AB}|=\sqrt{(-4)^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{36}=6$

$|\vec{BC}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{14}\approx 3{,}74$

$|\vec{CD}|=\sqrt{(4)^2+(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{36}=6$

$|\vec{DA}|=\sqrt{(2)^2+3^2+1}=\sqrt{14}\approx 3{,}74$

Diagonalen:

$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1 + 1} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

$\left|\vec{BD}\right| = \sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{94} \approx 9{,}70$

Umfang:

$u = \left|\vec{AB}\right| + \left|\vec{BC}\right| + \left|\vec{CD}\right| + \left|\vec{DA}\right| = 2 \cdot \sqrt{36} + 2 \cdot \sqrt{14} \approx 19{,}48$