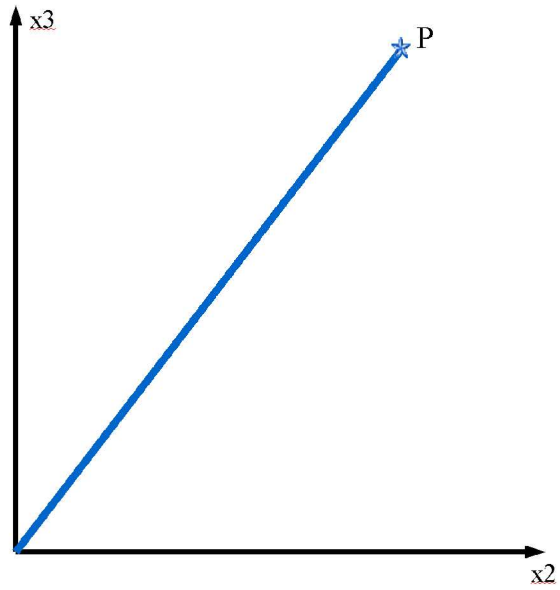
Längen, Abstände und Winkel

16 Der Betrag eines Vektors

Definition: Die Länge eines Vektors wird sein Betrag genannt.

16.1 Länge und Abstand in der 2-dimensionalen Ebene



Wenn **P(a|b)** gegeben ist, lässt sich die Strecke **OP** mit einem Rechteck der Kantenlängen **a; b** umschließen.

Die Strecke **OP** wird dann zur Diagonale des Rechtecks und teilt es in zwei rechtwinklige Dreiecke. Die Länge von **OP** kann mit Hilfe des Satz des Pythagoras bestimmt werden.

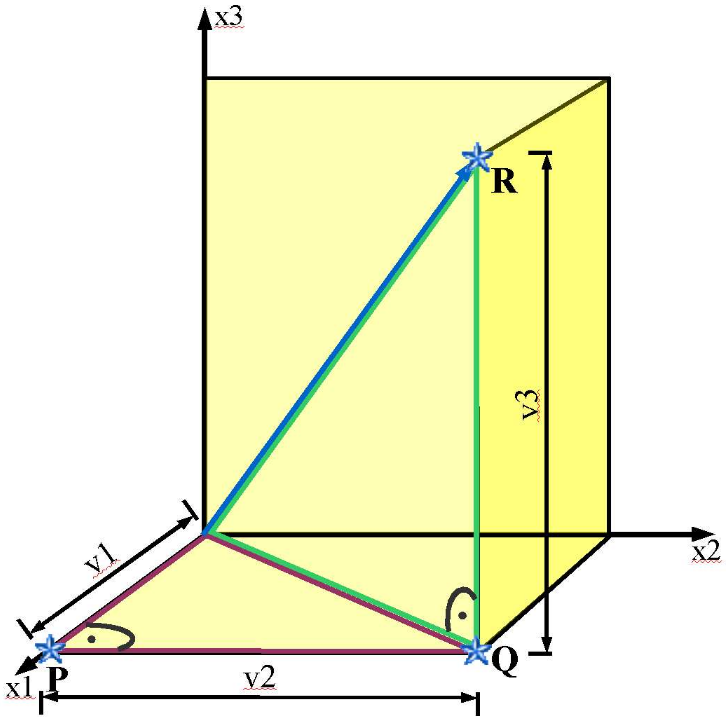
Der Satz des Pythagoras besagt für rechtwinklige Dreiecke: $a^2+b^2=c^2$

Für die beliebigen Punkte **P(a_1|a_2); R(b_1|b_2)** gilt:

$$a=b_1-a_1$$
$$b=b_2-a_2$$
$$|\vec{r}|=c$$
$$|\vec{r}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

16.2Längen von Vektoren im Raum

Im Grunde genommen unterscheidet sich das Verfahren für Vektoren im Raum nicht von dem für 2-dimensionale Vektoren.



Der Vektor $\vec{r}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ wird nun in ein Quader der Längen $\mathbf{v_1}$; $\mathbf{v_2}$; $\mathbf{v_3}$ eingepasst.

Der Satz des Pythagoras muss nun auf zwei Dreiecke angewandt werden:

$$\overline{O.R}^2=\overline{OQ}^2+\overline{QR}^2$$

Problem: $\overline{\mathbf{OQ}}$ ist unbekannt. Es muss aus einen anderen Dreieck berechnet werden:

$$\overline{OQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{PQ}^2$$

Dies oben eingesetzt ergibt: $\overline{O.R}^2=\overline{OP}^2+\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2 \quad => \quad \overline{O.R}=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2}$

Für die beliebigen Punkte **A($a_1|a_2|a_3$); B($b_1|b_2|b_3$)** gilt:

$$v_1=b_1-a_1$$
$$v_2=b_2-a_2$$
$$v_3=b_3-a_3$$

durch Einsetzen in $|\vec{r}|=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2}$ => $|\vec{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

16.3 Übungsaufgaben

S. 443 Nr. 2

a) $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix}$

$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{(29)}\approx 5{,}39$

i) $\vec{v}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\\\sqrt{7}\end{pmatrix}$

$|\vec{v}|=\sqrt{2+3+7}=\sqrt{12}\approx 3{,}46$

d) $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1{,}5\\3{,}4\\8{,}2\end{pmatrix}$

$|\vec{v}|=\sqrt{(-1{,}5)^2+3{,}4^2+8{,}2^2}=\sqrt{81{,}05}\approx 9{,}00$

f) $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$|\vec{v}|=\sqrt{2}\approx 1{,}41$

S. 443 Nr. 4

$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$|\vec{a}|=\sqrt{14}$

$\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$

$|\vec{b}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{36}=6$

$\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$

$|\vec{c}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$

$\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

$|\vec{d}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{16}=4$

$\vec{e}=\begin{pmatrix}\sqrt{10}\\\sqrt{5}\\\sqrt{10}\end{pmatrix}$

$|\vec{e}|=\sqrt{10+5+10}=5$

$\vec{f}=(-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$|\vec{f}|=(-2)\cdot\sqrt{1^2+4^2+4^2}=(-2)\cdot\sqrt{33}$

$\vec{g}=\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$|\vec{g}|=\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{18}$

$\vec{h}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{7}\\-2\end{pmatrix}$

$|\vec{h}|=\sqrt{3+7+(-2)^2}=\sqrt{14}$

$\vec{i}=\begin{pmatrix}2\\\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$

$|\vec{i}|=\sqrt{2^2+5}=3$

$\vec{j}=6\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$|\vec{j}|=6$

$\vec{k} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\vec{k}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 2} = \sqrt{36} = 6$

$|\vec{l}| = 3$

$\vec{m} = \sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$|\vec{m}| = \sqrt{2 + (-1)^2 + 2} = \sqrt{5}$

$\vec{l} < \vec{i} < \vec{a} = \vec{h} < \vec{d} < \vec{c} = \vec{e} < \vec{b} = \vec{k} < \vec{f}$

S. 445 Nr. 16

a) Kantenlängen:

$|\vec{AB}| = \sqrt{7^2 + 1 + (-2)^2} = \sqrt{54} \approx 7{,}35$

$|\vec{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 1 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$

$|\vec{CD}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$

$|\vec{DA}| = \sqrt{(-1)^2 + 1 + 2^2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

Diagonalen:

$|\vec{AC}| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1} = \sqrt{30} \approx 5{,}48$

$|\vec{BD}| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} \approx 6{,}32$

Umfang:

$u = |\vec{AB}| + |\vec{BC}| + |\vec{CD}| + |\vec{DA}| = \sqrt{54} + \sqrt{14} + \sqrt{34} + \sqrt{6} \approx 19{,}37$

b) Kantenlängen:

$|\vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$

$|\vec{BC}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$

$|\vec{CD}| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$

$|\vec{DA}| = \sqrt{(2)^2 + 3^2 + 1} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$

Diagonalen:

$|\vec{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 1 + 1} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

$|\vec{BD}| = \sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{94} \approx 9{,}70$

Umfang:

$u = |\vec{AB}| + |\vec{BC}| + |\vec{CD}| + |\vec{DA}| = 2 \cdot \sqrt{36} + 2 \cdot \sqrt{14} \approx 19{,}48$

Hausaufgabe: S. 443 Nr. 3, S. 444 Nr. 13